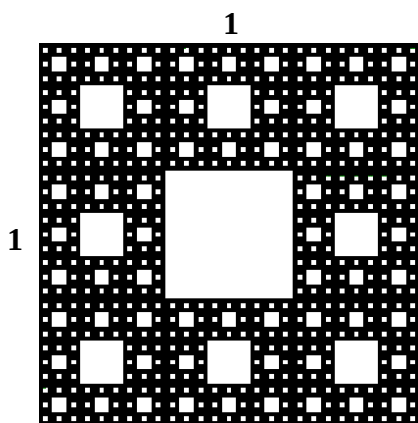


## Плоские фигуры без площади

Над своеобразными и интересными математическими задачами и головоломками ученые задумывались достаточно давно. Вот, например, у мэтра популярной математики Мартина Гарднера можно найти, что еще в 1905 г. на ежегодной математической олимпиаде в Венгрии предлагалась задача: «Квадрат со стороной, равной 1, разделён на 9 частей (как для игры крестики-нолики) и центральный квадрат удалён. Затем каждый из оставшихся 8 квадратов разделён на 9 частей, центральный квадрат удалён и процедура повторяется многократно. Найти предел, к которому стремится площадь полученной фигуры». Эта фигура и стала главным объектом моего исследования. Она называется «ковёр Серпинского» (в честь математика, первого ее построившего). Квадрат настолько дырявый, что он уже ближе к линии. Проверим, что при построении этой фигуры из первоначального квадрата вырезается еще множество самоподобных, сумма площадей которых равна площади первоначального квадрата.



Вначале вырезается квадрат со стороной, равной  $1/3$ ,  
Следовательно,  $S_1 = (1/3)^2$

Затем (подобным образом) – 8 оставшихся квадратов  
со стороной  $1/9 \Rightarrow S_2 = 8 \cdot (1/9)^2 = 8 \cdot (1/3)^4$

Далее:  $S_3 = 8^2 \cdot (1/3)^6$

...

$S_n = 8^n \cdot (1/3)^{2n+2}$

Нетрудно заметить, что  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  образуют  
бесконечно убывающую геометрическую прогрессию,

поэтому можно вычислить сумму площадей вырезанных квадратов по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \quad b_1 = (1/3)^2; \quad q = \frac{8^2 (1/3)^6}{8(1/3)^4} = 8(1/3)^2$$

Подставляя данные, получим:

$$S = \frac{(1/3)^2}{1 - 8(1/3)^2} = \frac{1/9}{1 - (8/9)} = 1(\text{кв.ед})$$

Т.о. получаем, что сумма площадей вырезанных квадратов равна площади первоначально данного квадрата (т.к. его сторона=1, то  $S=1(\text{кв.ед})$ ). Следовательно, площадь ковра Серпинского будет равна 0.

При этом наблюдается интересная картина: фигура, имеющая площадь, равную 0, будет иметь периметр (сумма сторон), стремящийся к бесконечности.

Доказать ‘отсутствие’ площади можно и более интересным способом, используя понятие фрактальной размерности.

Сравнительно давно в математике возник образ объекта, более объемистого, но, тем не менее, сходного с линией. Т.е. фигура, которая уже не плоскость, но еще и не пространство. Для характеристики такой фигуры нельзя уже было использовать понятие обычной Евклидовой размерности (число линейно независимых векторов в базисе), и пришлось вводить дробные размерности, которые и стали называть фрактальными.

*Фрактальная размерность множества* – размерность того пространства, которое полностью заполняется множеством.

*Фрактал* – множество, фрактальная размерность которого не совпадает с Евклидовой. Вообще, фракталами считаются любые геометрические объекты (линии, поверхности, пространственные тела), имеющие сильно изрезанную форму и обладающие свойством самоподобия, т.е., любая, даже мельчайшая часть фигуры, может рассказать о полном ее строении.

Связь между ковром Серпинского и фрактальной размерностью самая прямая, т.к. теория фракталов используется для рассмотрения фигур, имеющих сильно изрезанную форму, и доказательства того, что, например, их площадь равна 0.

Если доказать, что фрактальная размерность  $<$  евклидовой размерности, то по свойству фрактальной размерности можно сделать вывод, что площадь ковра Серпинского равна 0.

Будем использовать формулу:

$$d = - \frac{\ln\left(\frac{N(l)}{N(l')}\right)}{\ln\left(\frac{l}{l'}\right)}$$

где  $d$  – фрактальная размерность.

На  $n$ -ом шаге (например, на 3-ем) мы имели  $8^2$  вырезанных квадратов ( $N(l)$ ) со стороной  $1/27$  ( $l$ ) каждый. На  $n-1$ : 8 вырезанных квадратов ( $N(l')$ ) стороной  $1/9$  ( $l'$ ) каждый. Подставляя эти данные в формулу, получим:

$$d = - \frac{\ln\left(\frac{8^2}{8}\right)}{\ln\left(\frac{1/27}{1/9}\right)} = - \frac{\ln 8}{\ln 3^{-1}} = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.89 < 2 \Rightarrow S=0$$

Аналогично с ковром Серпинского можно построить множество других фигур, ‘лишенных’ площади, т.е. равных 0. Т.е., взяв какую либо правильную геометрическую фигуру (треугольник, ромб и т.д.), можно до бесконечности вырезать из нее множество самоподобных, тем самым площадь фигуры будет с каждым шагом все ближе и ближе к 0.

Применение: Благодаря коврику Серпинского можно исследовать свойство самоподобия фигур (увеличенные части объекта похожат на сам объект и друг на друга),

тем самым, перефразируя, скажем, что небольшая часть фрактала содержит информацию обо всем фрактале. Например, снежинка несет информацию о снежном сугробе, а горный камень имеет те же самые очертания, что и горный хребет. Благодаря этому свойству мы можем использовать фракталы для генерирования поверхности местности, которая походит на саму себя, независимо от масштаба, в котором она отражена. Эта идея нашла использование в компьютерной графике благодаря компактности математического аппарата, необходимого для ее реализации.