МОУ СОШ №4 г.Ростова

Геометрическая задача как средство развития продуктивного мышления учащихся

Учитель математики и физики:
С.П.Сергеева

Ростов, 2017

Содержание:

Введение.

Реальная цель школы сегодня – дать каждому школьнику общее образование и предоставить условия для гармоничного развития и совершенствования всех сторон его индивидуальности. При таком подходе математическое образование должно выступать как средство развития творческой личности. Что нужно развивать в человеке, чтобы он успешно действовал в различных жизненных ситуациях? [13, с. 4]

Одним из важнейших аспектов этой проблемы является развитие мышления школьников при обучении, которое важно и само по себе, и как средство формирования мировоззрения и понимания практической направленности изучаемого предмета. По данным Ю. К. Бабанского, 27% неуспевающих учащихся отстают из-за пробелов в развитии мышления. Поэтому проблема развития мышления при обучении достаточно актуальна. [2, с. 3]

Конечно мышление школьников формируется под воздействием совокупности школьных предметов, но роль математики в данном случае нужно выделить отдельно. Математика как наука способствует развитию очень многих качеств: это и умение логически мыслить, и умение правильно выражать свои мысли в речевой форме, при этом конечно же развивается пространственное и продуктивное мышление и многое другое. Ни для кого не секрет, что все это развивается у ребенка в первую очередь благодаря педагогу, который направляет его в нужное русло. Функции преподавателя в связи с задачей развития мышления сложны и разнообразны, что требует от него специальных знаний и умений. Преподавателю необходимо иметь представление о том, что практически любое содержание материала, в разной мере, естественно, представляет возможности для развития мышления учащихся.

Актуальность данной работы заключается в том, что проблема развития продуктивного мышления должна иметь свое отражение в школьном курсе геометрии в силу недостаточности подготовки учащихся в этой части, в силу большого числа логических ошибок, допускаемых ими в усваиваемом содержании геометрического материала.

Целью исследования явилось определение оптимальных условий и конкретных методов и приемов развития продуктивного мышления в процессе изучения математики (а конкретно геометрии) в средней школе.

Объектом исследования является учебно-воспитательный процесс.

Предметом нашего исследования стали проблемы использования геометрических задач как средства развития продуктивного (творческого) мышления, а также изучение способов развития продуктивного мышления на уроках геометрии в общеобразовательной школе.

После анализа литературы по интересующему нас вопросу мы выдвинули гипотезу, что развить творческое мышление на уроках геометрии, заинтересовать геометрией, привести к «открытию» математических фактов возможно только при условии использования на уроках задач нестандартных, задач, требующих известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности и изобретательности.

Проблема исследования заключается в особой организации процесса обучения решению нестандартных геометрических задач, при которой через решение этих задач учащиеся будут активно развивать продуктивное мышление.

Выделяя этапы достижения цели исследования, мы поставили следующие задачи:

Исследовать вопрос теории мышления: сущность проблемы и её историко-теоретический аспект;

Проанализировать вопрос, что есть понятие — продуктивное мышление;

Изучить основные особенности продуктивного мышления;

Выяснить какую роль играют учебные задачи в обучение математике, в частности, геометрии;

Дать характеристику нестандартных задач и выяснить, как они влияют на развитие продуктивного мышления;

Методами исследования являются:

- исследование психологической и методической литературы;

- наблюдение за учебной деятельностью учащихся в 7 – 9 классах общеобразовательной школы.

Логически работа построена из 3-х основных частей. В первой рассматриваются виды мышления и их характеристика; во второй приводятся в качестве примера задачи, помогающие в развитии творческого мышления; в третей обобщаются все полученные данные и на их основе делаются выводы и рекомендации.

Глава I. Теоретические аспекты развития мышления в процессе обучения.

§1. Подходы к определению мышления.

Мышление является высшим познавательным процессом. Оно представляет собой форму творческого отражения человеком действительности. По мнению Р.С. Немова, мышление можно понимать как творческое преобразование имеющихся в памяти представлений и образов. Для более точного понимания исследуемого психического процесса обратимся к истории вопроса и рассмотрим 2 основных подхода к определению данного понятия.

Для зарубежной психологии весьма типичен односторонний подход к характеристике мышления: оно выступает как процесс только репродуктивный, либо продуктивный. Представителями первого подхода были ассоцианисты (А. Бэн, Д. Гартли, И. Гербарт, Т. Рибо и др.). Характеризуя мышление с идеалистических позиций они сводили суть его к отвлечению от несходных элементов, к объединению сходных элементов в комплексы, к их перекомбинации, в результате которой не возникает ничего принципиально нового.

В настоящее время репродуктивный подход нашел свое выражение в теории бихевиоризма (А. Вейс, Э. Газри, Ж. Леб, Б. Скиннер, Э. Торндайк и др.). Эта теория привлекла внимание ученых своей установкой на разработку точных методов изучения психики, на объективность подхода к анализу психических явлений, однако сам анализ бихевиористы осуществляли с позиций механистического материализма.

Очень явно это выражено в работах Б. Скиннера. В теоретическом плане он прямо отрицает наличие у человека такого феномена, как мышление, сводит его к обусловленному поведению, связанному с закреплением приводящих к успеху реакций, к выработке системы интеллектуальных навыков, которые могут быть сформированы принципиально тем же путем, что и навыки у животных. На этих основах им разработана «линейная» система программированного обучения, предусматривающая изложение материала, столь развернутое и детализированное, что даже самый слабый ученик при работе с ним почти не допускает ошибок, и, следовательно, у него не возникают ложные связи между стимулами и реакциями, вырабатываются правильные навыки на основе положительного подкрепления.

Выразителями второго подхода к мышлению как к чисто продуктивному процессу являются представители гештальтпсихологии (М. Вертгаймер, В. Келер, К. Коффка и др.). Продуктивность рассматривается ими в качестве специфической черты мышления, отличающей его от других психических процессов. Мышление возникает в проблемной ситуации, включающей в себя неизвестные звенья. Преобразование этой ситуации приводит к такому решению, в результате которого получается нечто новое, не содержащееся в фонде имеющихся знаний и не выводимое из него непосредственно на основе законов формальной логики. Существенную роль в решении проблемы играет инсайт как прямое непосредственное видение пути к нахождению искомого, способа преобразования ситуации, дающего ответ на поставленный в задаче вопрос. Гештальтисты в исследованиях мышления широко использовали задачи, при решении которых у испытуемых возникал конфликт между имеющимися знаниями и требованиями задачи, и они вынуждены были преодолевать «барьер прошлого опыта», вследствие чего сам процесс поисков неизвестного выступал особенно явно. Благодаря этому ученые получили весьма ценный материал об особенностях мыслительной деятельности (К. Дункер, Л. Секей).

Однако, придавая большое значение инсайту, «ага-переживанию», гештальтисты не показали сам механизм его возникновения, не раскрыли того, что инсайт подготовлен активной деятельностью самого субъекта, его прошлым опытом.

В современной психологической литературе *процесс мышления,* по мнению Р. С. Немова, описывается следующим образом – это особого рода умственная и практическая деятельность, предполагающая систему включенных в нее действий и операций преобразовательного и познавательного (ориентировочно-исследовательского) характера [9, 159 с.].

Как же осуществляется процесс мышления?

Процесс мышления проходит 2 этапа:

1. Постановка задачи, которая начинается с потребности и необходимости понять и узнать. Здесь мы определяем предмет мышления и направленность мыслительного процесса. Это этап осознания и формулирования задач.

2. Этап решения поставленных задач, который осуществляется с помощью 8 мыслительных операций: анализа, синтеза, сравнения, классификации, систематизации, обобщения, абстрагирования, конкретизации.

Рассмотрим, как с помощью данных этапов решается задача.

Задача, выступающая как предмет мыслительной деятельности, появляется, когда человек сталкивается с каким-либо затруднением, препятствием, непониманием, и охватывает, как правило, не отдельный предмет, а целую ситуацию. Она может касаться социальных вопросов, взаимоотношений между людьми или проблем самого человека, его поведения или любой области его деятельности, включая учебные и игровые задачи. Психологически задача имеет существенную особенность – она должна быть принята человеком, т. е. должна восприниматься им как проблема, в решении которой он заинтересован. В основе этого лежит познавательная потребность. Объективно существующее противоречие или предъявляемое человеку требование может не вызвать у него потребности в мыслительной деятельности. Он будет прикладывать все усилия, чтобы ее избежать, найдет отговорки или попросту не увидит для себя в ситуации никакой задачи. Поэтому не любая задача и не любой вопрос, заданный учителем, ведет к процессу мышления. Когда ученик сам ощутит необходимость в новых знаниях, увидит, что не может с помощью известных ему средств достичь желаемого результата (ранее применявшиеся им методы «не работают»), тогда и возникает мыслительная задача, называемая психологами проблемной ситуацией.

Условием возникновения проблемной ситуации является познавательная потребность в неизвестном человеку знании или способе действия. Если имеющихся у него знаний достаточно, чтобы выполнить задание, или он может применить уже известный ему способ, проблемная ситуация не возникает, как не возникает она и в тех случаях, когда имеющихся знаний недостаточно для обнаружения проблемы, для понимания того, что появилась проблема. Поэтому процесс мышления всегда личностно окрашен: он начинается с появления препятствия, затруднения, значимого для человека и вызывающего желание или понимание необходимости его преодолеть.

Решение мыслительной задачи, или проблемной ситуации, протекает как поиск существенного с точки зрения задачи отношения объектов, которое служит ключом к ее решению. Для этого производят анализ условий задачи, того, что дано и что известно, и ее требований, т. е. желаемого результата. Неизвестное в проблемной ситуации становится целью действия и раскрывается как искомое задачи. Психологические исследования процесса мышления показали, что определение искомого связано с неоднократным обследованием элементов проблемной ситуации для выявления их связей с искомым. При этом происходит последовательное обобщение свойств рассматриваемых объектов, позволяющее планировать пути решения задачи, предвосхищая будущий результат. Это дает возможность уточнить первоначальный замысел решения: неизвестное, которое вначале выступает как нечеткое образование, путем непрерывного его сопоставления с известным и обобщения предшествующего опыта и требований, задаваемых проблемной ситуацией, приобретает определенность.

В случае сложных проблем на пути к достижению результата выделяется система целей: кроме общей цели, т. е. искомого, определяемого всей проблемной ситуацией в целом, выделяются промежуточные цели, связанные с предварительными этапами работы, ближайшие, более легко достижимые и более отдаленные. Целевое планирование любой деятельности на основе предвосхищения будущего результата составляет центральное звено мыслительного процесса. Оно непосредственно связано с развитием образного мышления.

Завершающим этапом процесса мышления являются осмысление того, что получено, его оценка и обоснование. Осмысление позволяет соотнести решение задачи с системой понятий: подвести его под определенную категорию или конкретизировать ранее известное положение, раскрыть механизм взаимодействия объектов, явлений. Тем самым мышление продвигается на более высокий уровень обобщения. Оценка полученного результата позволяет определить, насколько он отвечает поставленной задаче, полностью или частично ее решает. В ходе обоснования решения выделяются его сильные и слабые стороны, допущенные ошибки. Проверка, критика, контроль характеризуют мышление как сознательный процесс. Критичность мышления проявляется также в чувствительности к проблемам, умении их распознавать [1].

Таким образом, мышление – это всегда активный процесс преобразования ситуации, имеющей личностную значимость для человека, процесс, включающий в себя элементы творчества, связанные с новизной решаемой задачи, мысленное оперирование образами, осознание и оценку итогов работы. Умение думать означает развитие всех этих компонентов мышления.

§2. Виды мышления.

В психологии выделяют и исследуют теоретическую, практическую и ряд промежуточных видов деятельности, содержащих в себе и те и другие операции. Основные виды мышления представлены на рисунке (по Р.С. Немову) [9].

Теоретическое понятийное мышление – это такое мышление, пользуясь которым человек в процессе решения задачи непосредственно не обращается к опытному изучению действительности, не предпринимает практических действий, направленных на реальное преобразование действительности. Он обсуждает и ищет решение задачи с самого начала и до конца в уме, пользуясь готовыми знаниями, выраженными в понятиях, суждениях, умозаключениях.

Теоретическое образное мышление отличается от понятийного тем, что при решении задачи человек пользуется в добавок к перечисленным еще и конкретными образами.

Рассмотрим особенности *наглядно-образного и наглядно-действенного* практического мышления. Особенность первого состоит в том, что мыслительный процесс в нем непосредственно связан с восприятием мыслящим человеком окружающей действительности и без него совершаться не может. При втором виде мышления сам процесс подобного мышления представляет собой практическую преобразовательную деятельность, осуществляемую человеком, с реальными предметами.

§3. Продуктивное (творческое) мышление.

Много времени и усилий было затрачено психологами на выяснение того, как человек решает новые, необычные, творческие задачи. Однако до сих пор ясного ответа на вопрос о психологической природе творчества нет. Попробуем разобраться, что же такое творческое (продуктивное) мышление.

Хотя мышление как процесс обобщенного и опосредованного познания действительности всегда включает в себя элементы продуктивности, удельный вес ее в процессе мыслительной деятельности может быть различным. Там, где удельный вес продуктивности достаточно высок, говорят о собственно продуктивном мышлении как особом виде мыслительной деятельности. В результате продуктивного мышления возникает нечто оригинальное, принципиально новое для субъекта, т. е. степень новизны здесь высока. Условие возникновения такого мышления — наличие проблемной ситуации, способствующей осознанию потребности в открытии новых знаний, стимулирующей высокую активность решающего проблему субъекта.

В результате продуктивного мышления происходит становление психических новообразований — новых систем связи, новых форм психической саморегуляции, свойств личности, ее способностей, что знаменует сдвиг в умственном развитии.

Итак, *продуктивное мышление* характеризуется высокой новизной своего продукта, своеобразием процесса его получения и, наконец, существенным влиянием на умственное развитие. Оно является решающим звеном в умственной деятельности, так как обеспечивает реальное движение к новым знаниям [1].

С психологической точки зрения нет принципиальной разницы между продуктивным мышлением ученого, открывающего объективно новые, еще не ведомые человечеству закономерности окружающего мира, и продуктивным мышлением ученика, делающего открытие нового лишь для него самого, так как в основе лежат общие психические закономерности. Однако условия поиска новых знаний у них весьма различны, как различен и уровень мыслительной деятельности, приводящей к открытию.

Для того чтобы как-то обозначить эти различия большинство исследователей предпочитают в отношении такого вида мышления школьников употреблять термин «продуктивное мышление», а термином «творческое мышление» обозначать высшую ступень мыслительной деятельности, осуществляемую теми, кто открывает принципиально новые для человечества знания, создает нечто оригинальное, не имеющее себе аналога.

§4. Положительные качества мышления.

Индивидуальные различия в мышлении выражены достаточно отчетливо, что позволяет говорить о мыслительных способностях, определяющих успешность выполнения деятельности. «Способности— свойства функциональных систем, реализующих познавательные и психомоторные процессы, имеющие индивидуальную меру выраженности, проявляющуюся в успешности и качественном своеобразии выполнения деятельности» (В. Д. Шадриков).

Различия мыслительных способностей школьников могут проявляться, по мнению З.И.Калмыковой, в *качествах ума*, о которых речь пойдет далее.

Глубина ума проявляется в степени существенности признаков, которые человек может абстрагировать при овладении новым материалом, и в уровне их обобщенности. *Поверхностность ума* — противоположное качество, которое проявляется в выделении внешних, единичных признаков, в установлении случайных связей между ними, что отражает низкий уровень их обобщенности. *Гибкость ума* проявляется в степени изменчивости мыслительной деятельности, соответствующей меняющимся условиям исследуемой ситуации, решаемой проблемы. *Инертность ума* проявляется в склонности к шаблону, к привычным ходам мысли, в трудности переключения от одной системы действий к другой. *Устойчивость ума* проявляется в ориентации на совокупность выделенных ранее значимых признаков, на уже известные закономерности. *Неустойчивость ума* проявляется в трудности ориентации на признаки, входящие в содержание нового понятия или закономерности, в необоснованной смене ориентации, в переходе от одной системы действий к другой под влиянием случайных ассоциаций. *Осознанность мыслительной деятельности* проявляется в возможности выразить в слове как результат работы (существенные признаки понятия, закономерности и т. п.), так и те способы, приемы, с помощью которых этот результат был найден. *Неосознанность мыслительной деятельности* проявляется в том, что человек не может рассказать, как он решил задачу (даже тогда, когда получил верное решение), не замечает своих ошибок, не в состоянии указать те признаки, на которые он опирался, давая тот или иной ответ. *Самостоятельность ума* проявляется в активном поиске новых знаний, новых путей решения задач, в особой легкости восприятия помощи там, где человек сам не может найти решения, в учете ошибок и т. д. На высоком уровне проявления этого качества ума человек ищет не только правильное, но и оптимальное решение, без внешней стимуляции выходя за рамки непосредственно поставленной задачи. *Подражательность ума* проявляется в стремлении человека копировать уже известные способы решения, избегая интеллектуального напряжения даже там, где поставленная задача ему доступна, а также в поиске исчерпывающей, детализированной помощи, в слепоте к ошибкам [11].

Таковы основные особенности продуктивного мышления, качества ума, от которых (при прочих относительно равных условиях) зависит успешность учения.

Следует лишь отметить, что выделение данных личностных свойств продуктивного мышления, качеств ума, является весьма условным. Ведь психика представляет собой чрезвычайно сложное динамическое целое, по отношению к которому невозможно, применить дихотомию: слишком тонки, плавны подчас переходы между выделяемыми при анализе ее сторонами. О том, с помощью каких задач можно развить все вышеперечисленные качества, поговорим в следующей главе.

Глава II. Развитие мышления учащихся в процессе решения геометрических задач.

Геометрическая задача – это мощное средство развития продуктивного мышления, т.к. она заставляет ученика задуматься и над чертежом (развивается пространственное воображение), и над решением задачи (развивается логическое мышление).

Очень важный этап – это построение чертежа. Формируя у учащихся это умение, учитель должен помнить, что если ограничиваться стандартными чертежами, то школьники достаточно быстро начнут связывать формируемое понятие только с фигурами определенного вида и положения. «Стандартный» чертеж вызывает у учащихся неверные ассоциации, в результате которых в содержание понятия вносятся лишние признаки, являющиеся частными признаками демонстрируемой фигуры.

Чертежи и рисунки – эффективное средство формирования у учащихся умения подмечать закономерности на основе наблюдений, вычислений, преобразований, сопоставлений. Обращаясь к учителям математики, Д. Пойа писал: «Результат творческой работы математики – доказательное рассуждение, доказательство, но доказательство открывают с помощью правдоподобных рассуждений, с помощью догадки… Преподаватель должен показывать, что догадки в области математики могут быть разумными, серьезными, ответственными… Давайте учить догадываться!» [13].

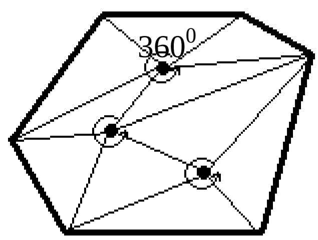
Дак как же научить детей правильно чертить рисунок к задаче и правильно рассуждать? По этому поводу И.С. Якиманская подчеркивает следующее: «Проанализировав собственную мыслительную деятельность, учитель может рассказать школьникам, как он сам осуществлял поиск решения, строил ход рассуждений, какие пробы производил, почему отказался от одних и предпочел другие, как находил выход их тупиковых ситуаций. Это будет иметь большое не только обучающее, но и воспитывающее значение. Учащиеся приобщаются к методу поисков и нахождения неизвестного, будут ориентироваться не столько на результат, сколько на анализ процесса его достижения. Задача педагога состоит не в том, чтобы сформировать безошибочное мышление (такого вообще не существует), а в том, чтобы научить учащихся идти путем самостоятельных находок и открытий» ([2], с. 76-77).

Т.о. приходим к выводу, что для эффективного развития мышления учащихся нужно включить их в самостоятельную поисковую деятельность по решению нестандартных задач. Это заставит ученика методом проб и ошибок развивать свою интуицию и мыслительную деятельность.

Но мы приходим к еще одной проблеме: ведь нестандартные задачи нельзя дать на контрольной работе, т.к. даже успевающие ученики могут с ней не справиться. Необходимо как можно чаще давать такие задачи на уроке и вместе с классом искать ее решение. Ну и, конечно же, такого рода задачи должны содержаться во всех математических олимпиадах. Это заставляет ученика не только «лоб в лоб» столкнуться с необычной задачей, но и, возможно, для кого-то это послужит сильной мотивацией для дальнейшего самообучения. Рассмотрим различные геометрические задачи, для решения которых требуется наличие у школьника нескольких положительных качеств ума, их взаимодействия.

Задача 1 (Областная олимпиада, 9 класс)

Тысяча точек являются вершинами выпуклого тысячеугольника, внутри которого взяты 500 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Тысячеугольник разделили на непересекающиеся треугольники, вершинами которых являются данные 1500 точек. Сколько получилось треугольников?



При поиске решения выясняем, что в условии существенным для составления модели задачной ситуации является наличие внутри n-угольника

(n – четное), $\frac{n}{2}$ точек и способ разбиения на треугольники. Возьмем, например, восьмиугольник и четыре точки внутри него. Подсчет количества треугольников не позволяет установить зависимость их числа от n.

Ключом к решению задачи выступает такая характеристика треугольника, как сумма его внутренних углов. Искомое число треугольников (обозначим его x) получим, разделив сумму всех внутренних углов всех образовавшихся треугольников на 180^0.

Решение.

Сумма внутренних углов всех образовавшихся треугольников складывается из внутренних углов тысячеугольника и углов вокруг внутренних 500 точек.

$$S = (1000 - 2) \cdot 180^0 + 360^0 \cdot 500 = 180^0 \cdot 1998$$

Т.к. сумма внутренних углов в каждом треугольнике 180^0, то число треугольников

$$x = S \div 180^0 = 180^0 \cdot 1998 \div 180^0 = 1998$$

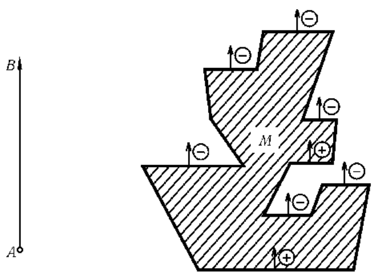
Анализ: Эта задача очень полезна для развития положительных качеств ума. По одному только содержанию мы уже видим, что это нестандартная задача и решить по шаблону мы ее не сможем. Здесь мы должны задействовать свою мыслительную деятельность, вспомнить все необходимые теоремы и правила, систематизировать их и суметь применить к данной задаче. Это происходит только при развитой *гибкости ума*. Очень сложно начать рассуждение, нужно заметить, что точек в вершинах в два раза больше, чем точек внутри, и попытаться от этого оттолкнуться, суметь реализовать это условие. В этом проявиться *глубина ума* школьника.

Формированию гибкости и глубины ума могут способствовать следующие задачи.

Задача 2 (9 класс)

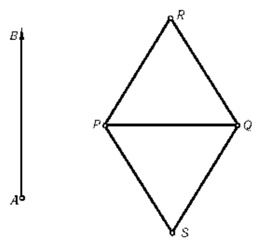
Докажите, что существуют равновеликие многоугольники, которые нельзя разбить на многоугольники (возможно, невыпуклые), переводящиеся друг в друга параллельным переносом.

Решение.



Фиксируем на плоскости некоторый луч *AB*. Любому многоугольнику M поставим в соответствие число F(M) (зависящее от *AB*) следующим образом. Рассмотрим все стороны M, перпендикулярные *AB*, и каждой из них поставим в соответствие число $\pm l$, где l — длина этой стороны и знак к «плюс» берется, если мы, идя от этой стороны в направлении луча *AB*, попадаем внутрь M, а знак к «минус» — если наружу (рис.). Сумму всех полученных чисел мы и обозначим F(M); если у M нет сторон, перпендикулярных *AB*, то F(M) = 0.

Понятно, что если многоугольник M разрезан на многоугольники M_1 и M_2, то $F(M) = F(M_1) + F(M_2)$, а если M' получен из M параллельным переносом, то F(M') = F(M). Поэтому, если M_1 и M_2 можно разрезать на части, переводящиеся друг в друга параллельным переносом, то $F(M_1) = F(M_2)$. На рис. ниже изображены равные правильные треугольники *PQR* и *PQS* и луч *AB*, перпендикулярный стороне *PQ*. Легко видеть, что F(PQR) = a

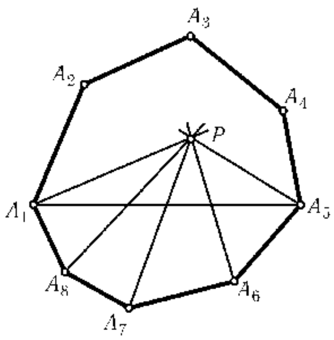


и F(PQS) = - a, где a — длина сторон этих правильных треугольников. Поэтому равные треугольники *PQR* и *PQS* нельзя разрезать на части, переводящиеся друг в друга параллельным переносом.

Задача 3 (Всероссийская олимпиада, 9 класс)

Внутри выпуклого 2n-угольника взята точка *P*. Через каждую вершину и точку *P* проведена прямая. Докажите, что найдется сторона многоугольника, с которой ни одна из проведенных прямых не имеет общих внутренних точек.

Решение

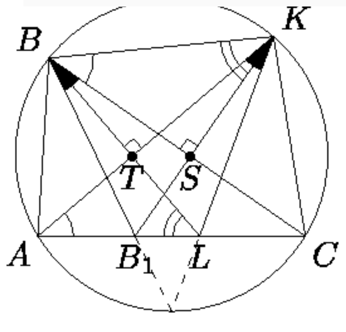


Возможны два случая: 1. Точка *P* лежит на некоторой диагонали *AB*. Тогда прямые *PA* и *PB* совпадают и не пересекают сторон. Остаются 2n - 2 прямые; они пересекают не более 2n - 2 сторон.

2. Точка *P* не лежит на диагонали многоугольника $A_1A_2...A_{2n}$. Проведем диагональ A_1A_{n+1}. По обе стороны от нее лежит по n сторон. Пусть для определенности точка *P* лежит внутри многоугольника $A_1...A_{n+1}$ (рис.). Тогда прямые PA_{n+1}, PA_{n+2},..., PA_{2n}, PA_1 (число этих прямых равно n + 1) не могут пересекать стороны $A_{n+1}A_{n+2}$, $A_{n+2}A_{n+3}$,..., $A_{2n}A_1$. Поэтому оставшиеся прямые могут пересекать не более чем n - 1 из этих n сторон.

Задача 4 (Всероссийская олимпиада, 9 класс)

В треугольнике *ABC* проведена биссектриса BB_1 . Перпендикуляр из B_1 на *BC* пересекает дугу *BC* описанной окружности треугольника *ABC* в точке *K* . Перпендикуляр из *B* на *AK* пересекает *AC* в точке *L* . Докажите что точки *K* , *L* и середина дуги *AC* (не содержащей точку *B*) лежат на одной прямой.

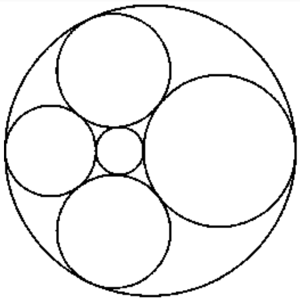


Пусть *S* и *T* – основания перпендикуляров, опущенных из B_1 и *B* соответственно на *BC* и *AK* (см. рис.) . В прямоугольных треугольниках *ALT* и *BSK* имеем $\angle SBK=\angle LAT=\alpha$ как опирающиеся на одну дугу *KC* ; поэтому $\angle B_1LB=\angle ALT=90^o-\alpha=\angle BKS=\angle BKB_1$, т.е. точки *B* , B_1 , *L* , *K* лежат на одной окружности. Отсюда $\angle BB_1K=\angle BLK=\beta$, и из прямоугольных треугольников BB_1S и KLT получаем $\angle AKL = \angle\ TKL = 90^o - \beta$ $B_1BS = \frac{1}{2}\angle\ ABC = \frac{1}{2}\angle\ AKC$, что и означает, что KL проходит через середину AC .

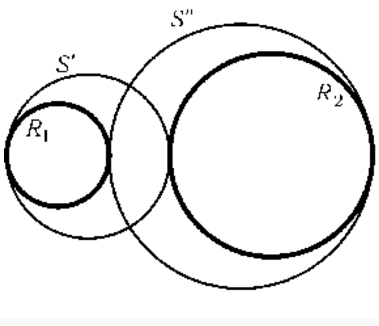
Задача 5 (Всероссийская олимпиада, 9 класс)

Каждая из шести окружностей касается четырех из оставшихся пяти (рис.). Докажите, что для любой пары несоприкасающихся окружностей (из этих шести) их радиусы и расстояние между центрами связаны соотношением $d_2 = r_{12} + r_{22} \pm 6r_1r_2$ («плюс» — если окружности не лежат одна внутри другой, «минус» — в противном случае).

Решение



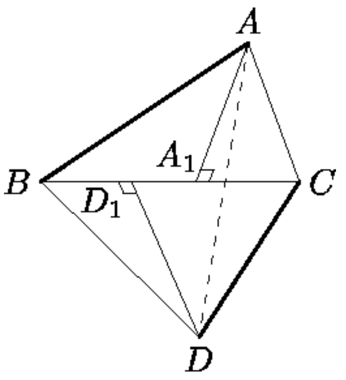
Пусть R_1 и R_2 — какая-либо пара несоприкасающихся окружностей. Оставшиеся четыре окружности образуют цепочку, поэтому окружности S' и S'', касающиеся R_1 и R_2 в точках их пересечения с линией центров, пересекаются под прямым углом (рис.). Если R_2 лежит внутри R_1, то радиусы r' и r'' окружностей S' и S'' равны $(r_1 + r_2 + d)/2$ и $(r_1 + r_2 - d)/2$, а расстояние между их центрами $d' = 2r_1 - r_1 - r_2 = r_1 - r_2$. Угол между S' и S'' равен углу между их радиусами, проведенными в точку пересечения, поэтому (d')2 = (r')2 + (r'')2 или, после преобразований, $d_2 = r_{12} + r_{22} - 6r_1r_2$.



В случае, когда R_1 и R_2 не лежат одна внутри другой, радиусы окружностей S' и S'' равны $(d + (r_1 - r_2))/2$ и $(d - (r_1 - r_2))/2$, а расстояние между центрами $d' = r_1 + r_2 + d - (r_1' + r_2') = r_1 + r_2$. В результате получаем $d_2 = r_{12} + r_{22} + 6r_1r_2$.

Задача 6 (Всероссийская олимпиада, 8 класс)

Дана треугольная пирамида. Леша хочет выбрать два ее скрещивающихся ребра и на них, как на диаметрах, построить шары. Всегда ли он может выбрать такую пару, что любая точка пирамиды лежит хотя бы в одном из этих шаров?



Решение

Пусть дана пирамида $ABCD$. Выберем пару ее скрещивающихся ребер с наибольшей суммой квадратов– пусть это AB и CD . Покажем, что шары с диаметрами AB и CD покрывают каждое ребро пирамиды. Ясно, что достаточно доказать это для ребра BC . Рассмотрим основания A_1 и D_1 перпендикуляров, опущенных соответственно из A и D на BC . Тогда $AB^2+CD^2=AA_1^2+BA_1^2+DD_1^2+CD_1^2 \geq AC^2+BD^2=AA_1^2+CA_1^2+DD_1^2+BD_1^2$, откуда $BA_1^2+CD_1^2 \geq CA_1^2+BD_1^2$. Это означает, что отрезки BA_1 и CD_1 перекрываются, а значит, они покрывают весь отрезок BC . Но наши шары как раз покрывают оба этих отрезка. Поскольку шары покрывают все ребра, то они покрывают и все грани. Пусть теперь какая-то точка X тетраэдра не покрыта шарами. Тогда из нее можно выпустить луч, не имеющий общих точек с шарами. Однако он пересечет поверхность в точке, принадлежащей одному из шаров – противоречие.

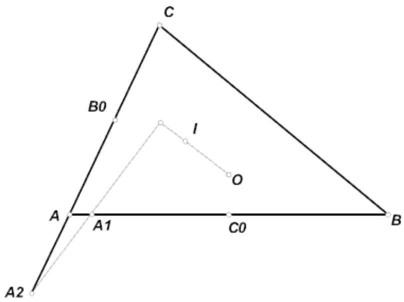
Ответ: Всегда.

Задача 7 (Всероссийская олимпиада, 8 класс)

Имеется треугольник ABC . На луче BA отложим точку A_1 , так что отрезок BA_1 равен BC . На луче CA отложим точку A_2, так что отрезок CA_2 равен BC . Аналогично построим точки B_1 , B_2 и C_1 , C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 параллельны.

Решение

Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника. Так как BI — биссектриса угла B равнобедренного треугольника A_1BC , $A_1I = IC$. Аналогично $A_2I = IB$. Следовательно $A_1I^2 - A_2I^2 = IC^2 - IB^2 = (p - c)^2 - (p - b)^2 = a(b - c)$. С другой стороны, если $B0$, $C0$ — середины AC и AB , то



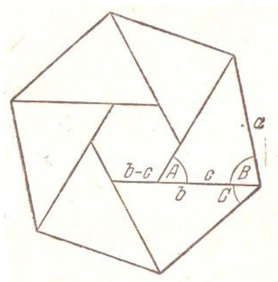
$$OA_1^2 - OA_2^2 = OC_0^2 - OB_0^2 + A_1C_0^2 - A_2B_0^2 = (\tfrac{b}{2})^2 - (\tfrac{c}{2})^2 + (a - \tfrac{c}{2})^2 - (a - \tfrac{b}{2})^2 = a(b - c)$$

Следовательно, прямые A_1A_2 и OI перпендикулярны. Аналогично получаем, что OI перпендикулярна двум другим прямым.

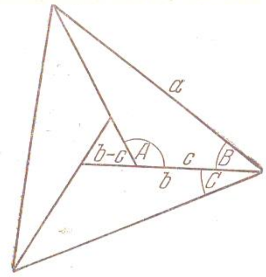
Задача 8.

Доказать без помощи тригонометрии, что если в треугольнике $\angle A = 60^0$, то площадь S треугольника определяется формулой $S = \frac{\sqrt{3}}{4}[a^2 - (b - c)^2]$, а если $\angle A = 120^0$, то $S = \frac{\sqrt{3}}{12}[a^2 - (b - c)^2]$

Решение:



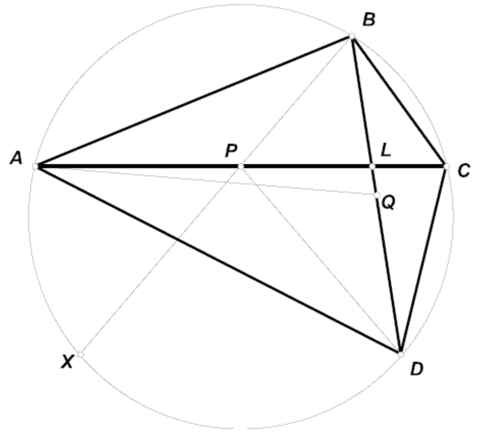
Если в ΔABC со сторонами a, b, c дан $\angle A = 60^0$, то $\angle B + \angle C = 120^0$, и шесть таких треугольников можно уложить венком (см. рис), ограниченным извне правильным шестиугольником со стороной a, а изнутри правильным шестиугольником со стороной b-c. Вычисляя площади обоих шестиугольников, получим нужную формулу.



В случае, когда в треугольнике дан $\angle A = 120^0$, то $\angle B + \angle C = 60^0$; три таких треугольника укладываются в треугольный венок (см.рис). Рассуждение, аналогичное предыдущему, дает нужную формулу.

Задача 9 (Всероссийская олимпиада, 9 класс)

Прямые, симметричные диагонали BD четырехугольника $ABCD$ относительно биссектрис углов B и D , проходят через середину диагонали AC. Докажите, что прямые, симметричные диагонали AC относительно биссектрис углов A и C , проходят через середину диагонали BD .



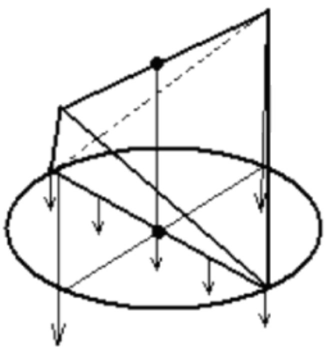
Решение

Пусть P — середина AC , L — точка пересечения диагоналей. Применив теорему синусов к треугольникам ABP, ABL, CBP, CBL, получаем, что $AL/CL=(AB/CB)2$. Аналогично, $AL/CL=(AD/CD)^2$, т.е. $\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{AD}=\frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle DBA}=\frac{\sin\angle CDP}{\sin\angle CBP}$. Следовательно, прямые BP и CP симметричны относительно AC. Пусть X — вторая точка пересечения прямой BP с описанной окружностью треугольника ABC . Точка, симметричная X относительно серединного перпендикуляра к AC лежит как на PD, так и на BD, и, значит, совпадает с D. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — вписанный, и $AB\cdot CD=AD\cdot BC=(AC\cdot BD)/2$. Пусть прямая, симметричная AC относительно биссектрисы угла A , пересекает BD в точке Q. Тогда треугольники ABQ и ACD подобны, следовательно, $AB/AC=BQ/BD$ и $BQ=BD/2$.

Задача 10 (Городская олимпиада, 11 класс)

Можно ли жесткий правильный тетраэдр с ребром l «протащить» сквозь обруч диаметром l.

Решение.



Расположим тетраэдр так, чтобы прямая, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер была перпендикулярна плоскости окружности и проходила через ее центр.

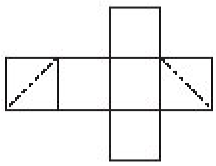
Для ответа достаточно изобразить проекцию соответствующим образом расположенного тетраэдра на круг.

Анализ: Такого рода задачи очень полезно давать школьникам с самых ранних лет, т.к. они заставляют представить происходящее, развивают пространственное мышление. Сложность состоит в том, что мы привыкли геометрические задачи доказывать, а в данном случае достаточно показать случай, когда условие выполняется. Эта задача хороша тем, что она не шаблонная. Для ее решения требуется развитие у школьника *самостоятельности ума* и *осознанности мыслительной деятельности.*

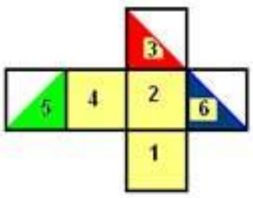
Формированию самостоятельности ума и мыслительной деятельности могут способствовать следующие задачи.

Задача 11.

Куб пересечен плоскостью. На развертке пунктиром показана часть следа этого сечения на поверхности куба. Какая фигура была в сечении?

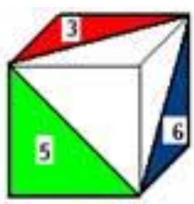


Решение:



Пронумеруем грани куба и попробуем развертку снова свернуть в куб.

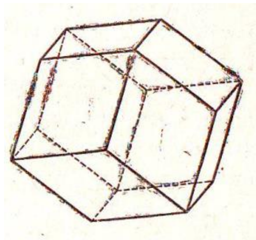
В качестве донышка возьмем грань 1. Тогда, 2 - задняя стенка, 3 - крышка, 4 - левая боковая стенка, 5 - передняя стенка, 6 - правая боковая стенка. Куб будет иметь вид, указанный на рисунке. Очевидно, в сечении куба плоскостью получается правильный



треугольник. Стороны этого треугольника - диагонали квадратов – боковых граней.

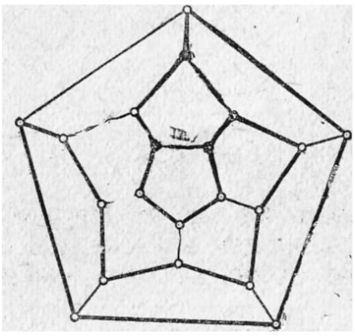
Верный ответ – правильный треугольник.

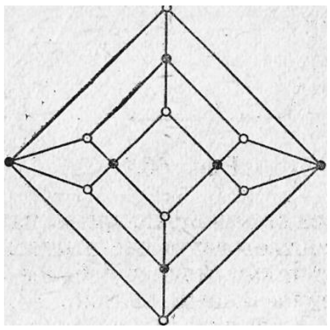
Задача 12.



Муха села на вершину модели правильного додекаэдра (двенадцатигранника) и решила обойти его, двигаясь по ребрам додекаэдра; при этом ей удалось посетить все вершины, не побывав ни в одной из них дважды и вернувшись в конце путешествия в исходную вершину. После этого она попробовала обойти тем же способом все вершины ромбического додекаэдра, ограниченного 12 ромбами. Удалось ли ей это?

Решение:





Многогранник образует пространственную сеть, сторонами которой являются ребра, узлами — вершины, а ячейками - грани многогранника. Дорога мухи должна образовать замкнутую ломаную линию, без кратных точек, принадлежащую указанной выше сети. Возможность выделения такой дороги сохранится, если мы деформируем сеть так, чтобы уместить ее на плоскости.

На рис. мы видим растянутую на плоскости сеть ребер правильного додекаэдра. Жирной линией обозначен путь мухи, отвечающий условию задачи.

Теперь подобным же образом растянем на плоскости сеть ромбического додекаэдра (см. рис). Узлы сети можно разделить два класса:

на такие, в которых сходятся три ребра, и на такие, в которых сходятся четыре ребра (на рисунке последние обозначены черными точками).

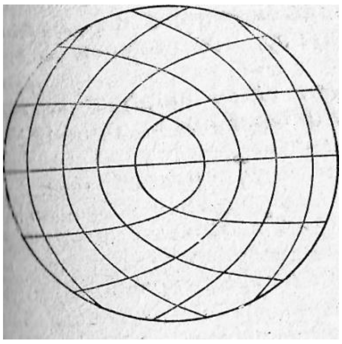
Каждый узел первого класса соединен отрезком только с узлами второго класса, и наоборот. Поэтому муха во время своего путешествия должна была проходить поочередно через узлы первого класса и узлы второго класса. Так как узлов первого класса восемь, а узлов второго класса шесть, то муха не может посетить всех вершин ромбического додекаэдра, передвигаясь по ребрам так, чтобы не пройти через одну вершину дважды и вернуться к исходной точке.

Задача 13.

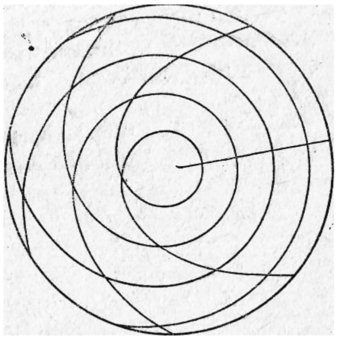
Три сферы имеют общую точку P, причем известно, что никакая прямая, проходящая через точку P, не касается сразу всех сфер. Показать, что эти сферы имеют еще одну общую точку.

Решение:

Среди трех данных сфер нет двух, касающихся друг друга. В самом деле, в противном случае общая касательная плоскость этих двух сфер,



проходящая через точку P, пересечет третью сферу по окружности, Касательная к этой окружности в точке P будет, очевидно, касательной ко всем трем сферам, что противоречит условию задачи.

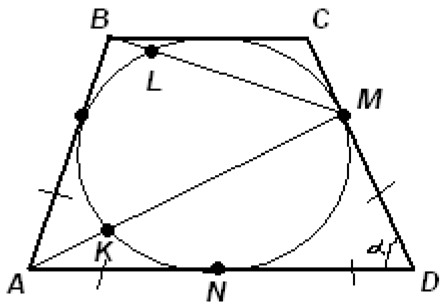


Итак, две сферы должны пересекаться по окружности, проходящей, очевидно, через точку P. Эта окружность не может иметь с третьей сферой только одну общую точку, так как иначе касательная к окружности в точке P была бы общей касательной к трем сферам. Точка пересечения этой окружности с третьей сферой, отличная от точки P, принадлежит всем трем сферам.

Задача 14 (Областная олимпиада, 10 класс)

В равнобокую трапецию *ABCD* (*AB*=*CD*) вписана окружность. Пусть *M* – точка касания окружности со стороной *CD*. *K* – точка пересечения окружности с отрезком *AM*, *L* – точка пересечения окружности с отрезком *BM*. Вычислите величину $\frac{AM}{AK}+\frac{BM}{BL}$

Решение.



Пусть N – середина стороны AD, AN = a, AK = x, AM = y, ∠ADM = α.

1. По свойству касательных к окружности и учитывая, что трапеция равнобокая $AN = ND = DM = a$
2. По теореме косинусов из *ΔADM* $y^2 = 4a^2 + a^2 - 4a^2 \cdot cos\alpha = a^2(5 - 4cos\alpha)$.
3. По свойству секущей и касательной к окружности $AK \cdot AM = AN^2$ или $xy = a^2$
4. $\frac{AM}{AK} = \frac{x}{y} = \frac{y^2}{xy}$, откуда $\frac{AM}{AK} = \frac{a^2(5-4cos\alpha)}{a^2} = 5 - 4cos\alpha$
5. Аналогично для *ΔBCM* имеем $\frac{BM}{BL} = 5 - 4\cos(180^0 - \alpha) = 5 + 4cos\alpha$
6. Следовательно $\frac{AM}{AK}+\frac{BM}{BL} = 5 - 4cos\alpha + 5 + 4cos\alpha = 10$

Анализ: Оригинальность этой задачи прослеживается даже в самой формулировке данной задачи, где требуется найти сумму отношений длин отрезков, хотя ни одного линейного элемента не задано. А в процессе решения оригинальности мышления необходима при переходе в четвертом пункте от отношения *y : x* к отношению *y*^{2} *: xy*.

Среди основных положительных качеств мышления особое место занимают *доказательность* и *критичность*.

Доказательность мышления характеризуется умением терпеливо относиться к собиранию фактов, достаточных для вынесения какого-либо суждения, стремлением к логическому обоснованию каждого шага в решении задачи.

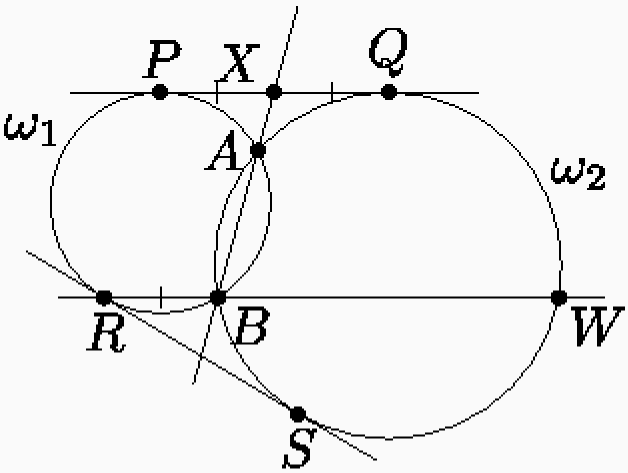
Критичность мышления характеризуется умением оценивать правильность выбранных путей решения проблемы, получаемые результаты с точки зрения их достоверности, умением отличать результаты достоверные от правдоподобных. Критичность мышления проявляется в умении осознать, является ли решение доказательным.

Формированию доказательности и критичности могут способствовать следующие задачи.

Задача 15.

Две окружности $\sigma1$ и $\sigma2$ пересекаются в точках A и B . Пусть PQ и RS – отрезки общих внешних касательных к этим окружностям (точки P и R лежат на $\sigma1$, точки Q и S – на $\sigma2$). Оказалось, что $RB||\ PQ$. Луч RB вторично пересекает $\sigma2$ в точке W . Найдите отношение RB/BW .

Решение

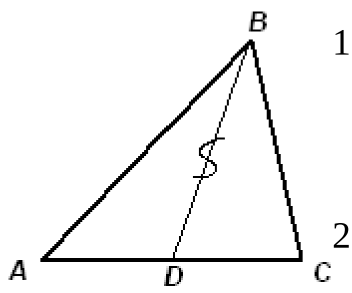


Пусть X – точка пересечения прямых AB и PQ . Тогда $XP2=XA\cdot XB=XQ2$, т.е. X – середина PQ . Прямые AB и PR параллельны, так как обе эти прямые перпендикулярны линии центров окружностей $\sigma1$ и $\sigma2$. Из условия теперь получаем, что четырехугольник $PXBR$ – параллелограмм, откуда *BR* = $XP=\frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} RS$ (последнее – из симметрии *PQ* и *RS*). Далее, так как *RS* – отрезок касательной к σ2 , то $RB\cdot RW = RS2=(2RB)2$, откуда $RW=4RB$. Значит, $RB/BW = 1/3$.

Задача 16 (*Районная олимпиада, 8 класс*)

Можно ли разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника?

Ответ: Нельзя.

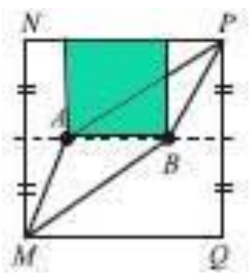


Доказательство

1. Предположим, что отрезок *BD* делит разносторонний треугольник *ABC* на два равных треугольника.
2. Тогда в равных треугольниках против общей стороны *BD* лежат равные углы $\angle A = \angle C$
3. По условию в *ΔABC AB≠BC*, откуда $\angle A \neq \angle C$
4. Получим противоречие, следовательно предположение неверно и разрезать разносторонний треугольник на два равнобедренных нельзя.

Задача 17.

MNPQ - квадрат со стороной 6 см, A и B - две точки на его средней линии. Ломанные MAP и MBP делят квадрат на 3 части одинаковой площади. Чему равна длина AB?



Решение:

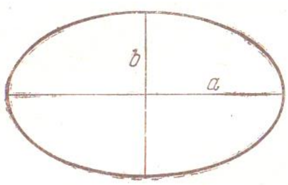
Восстановим перпендикуляры из точек A и B. Рассмотрим образовавшийся закрашенный прямоугольник.

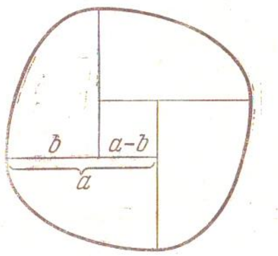
Видно, что его площадь равна площади MBPA и следовательно, равна одной трети площади большого квадрата и равна (6 · 6) : 3 = 12 кв.см.

Высота закрашенного прямоугольника равна 6 : 2 = 3 (см). Длина его второй стороны AB равна 12 $см^2$: 3 см = 4 см.

Задача 18.

Дан эллипс, длина большой оси которого равна *2a*, а длина малой оси равна *2b*. Нарисовать замкнутую кривую той же длины, что и длина эллипса, ограничивающую площадь, большую площади эллипса на $(a-b)^2$.





Решение:

I способ. Искомую фигуру получаем, рассекая эллипс на четыре части и складывая их так, как показано на рисунке ниже.

II способ. Соединяя поочередно вершины эллипса хордами, получаем ромб, окруженный четырьмя сегментами эллипса. Заменяя этот ромб, площадь которого равна *2ab*, квадратом, площадь которого равна $a^2+b^2=c^2$ так, чтобы четыре сегмента эллипса по-прежнему прилегали к сторонам квадрата. Площадь, ограниченная кривой, увеличивается на разность площадей квадрата и ромба, т.е. на $c^2-2ab=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$.

Анализ: Решение данной задачи мы привели в двух вариантах. Это тоже очень хороший способ развития продуктивного мышления. В данном случае об уровне развития мышления школьников можно судить по сформированности у них таких качеств мышления как активность и самостоятельность, т.к. именно они являются основой для проявления всех выше рассмотренных качеств мышления.

Активность мышления характеризуется постоянством усилий, направленных на решение некоторой проблемы (задачи), желанием обязательно решить задачу, изучить различные подходы к ее решению, исследовать задачную ситуацию, при необходимости, переформулировать задачу на равносильную.

Глава III. Обобщающие выводы и рекомендации.

После того как были приведены примеры различных задач, каждая из которых способствует развитию того или иного положительного качества, возникает еще вопрос: а как мы определим, сформировалось ли у ученика то или иное качество? Давайте попробуем с этим разобраться.

Предположим, что учащимся были предложены данные выше задачи. Попробуем определить сформированность положительных качеств ума. Остановимся на характеристике некоторых показателей, по которым мы судили о продуктивности мышления школьников, давая его *качественную* характеристику.

Самостоятельность ума мы определим по тому, справился ли школьник с решением проблемы сам, или ему потребовалась дополнительная помощь, например помощь учителя, а так же по тому, сколько способов решения предложил ученик.

Глубина ума, отражающая степень существенности абстрагируемых признаков и степени их обобщенности, определяется на основе анализа суждений учащихся при их попытках сформулировать искомую закономерность.

Гибкость ума проявляется в возможности формулировки как минимум двух вариантов решения искомой задачи, в переходе к суждениям более высокой степени обобщенности, введении в них новых научных терминов вместо житейских, в легкости отказа от ошибочности суждений и т. д.

Устойчивость ума находит свое выражение в воспроизведении и целесообразной ориентации на найденный в процессе анализа значимый признак равновесия, в возможности одновременной ориентации на оба признака равновесия.

По результатам проведенного исследования можно сделать вывод, что с целью эффективного развития мышления учеников необходимо включить их в самостоятельную поисковую деятельность по решению нестандартных задач [2]. Мы говорим, что все выше приведенные задачи – нестандартные. А почему? Подведем небольшой итог.

Какая же задача называется нестандартной? «Нестандартные задачи — это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [14].

Однако следует заметить, что понятие «нестандартная задача» является относительным. Одна и та же задача может быть стандартной и нестандартной, в зависимости от того, знаком решающий задачу со способами решения задач такого типа или нет.

Таким образом, нестандартная задача — это задача, алгоритм решения которой учащимся неизвестен, то есть учащиеся не знают заранее ни способа ее решения, ни того, на какой учебный материал опирается решение.

К сожалению, иногда учителя единственным способом обучения решению задач считают показ способов решения определенных видов задач, после чего следует порой изнурительная практика по овладению ими. Нельзя не согласиться с мнением известного американского математика и методиста Д. Пойа, что, если преподаватель математики «заполнит отведенное ему учебное время натаскиванию учащихся в шаблонных упражнениях, он убьет их интерес, затормозит их умственное развитие и упустит свои возможности» [13].

Как же помочь учащимся научиться решать нестандартные задачи?

Универсального метода, позволяющего решить любую нестандартную задачу, к сожалению, видимо нет, так как нестандартные задачи в какой-то степени неповторимы. Однако опыт работы многих передовых учителей, добивающихся хороших результатов в математическом развитии учащихся как у нас в стране, так и за рубежом, позволяет сформулировать некоторые методические приемы обучения учащихся способам решения нестандартных задач.

В литературе (отечественной и зарубежной) методические принципы обучения учащихся умением решать нестандартные задачи описаны неплохо. Наиболее удачными, на наш взгляд, в этом отношении являются книги Д. Пойа «Как решать задачу», «Математическое открытие», «Математика и правдоподобные рассуждения» Л. М. Фридмана, Е. Н. Турецкого «Как научиться решать задачу». И хотя некоторые из них адресованы учащимся, желающим научиться решать задачи, они, без сомнения, могут быть использовании учителями при обучении школьников умениям решать нестандартные задачи.

Прежде всего отметим, что научить учащихся решать задачи (в том числе и нестандартные) можно только в том случае, если у учащихся будет желание их решать, то есть если задачи будут содержательными и интересными с точки зрения ученика. Поэтому проблема первостепенной важности, стоящая перед учителем,— вызвать у учащихся интерес к решению той или иной задачи. Необходимо тщательно отбирать интересные задачи и делать их привлекательными для учащихся. Как это сделать — решать самому учителю. Наибольший интерес вызывают у учащихся задачи, взятые из окружающей их жизни, задачи, естественным образом связанные со знакомыми учащимся вещами, опытом, служащие понятной ученику цели.

Учитель, как нам кажется, должен уметь находить интересные для учащихся задачи и своевременно предлагать их.

Заключение

Изучив и проанализировав психологическую и методическую литературу мы выполнили следующие задачи:

1. Выделили пути развития продуктивного мышления учащихся.
2. Дали характеристику задач и описали их влияние на развитие продуктивного мышления школьников.

В результате наблюдения за учебной деятельностью учащихся в 7-9 классах общеобразовательной школы можно сделать вывод: геометрические задачи играют серьезную роль не только в математической, но и в общей подготовке школьника. Нестандартные задачи влияют на развитие всех качеств ума, которые в дальнейшем помогают и в учебе, и в работе, и в жизни.

Список литературы.

1. Брушлинский А. В. Общая психология: Учеб. пособие для студентов пед. институтов/ А. В. Брушлинский, В. П. Зинченко, А. В. Петровский и др.; под ред. А. В. Петровского – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1986 – 464 с.
2. Виноградова Л. В. Развитие мышления учащихся при обучении математике, Петрозаводск «Карелия», 1985
3. Все задачи «Кенгуру». Математика для всех, С.-Пб., 2003
4. Вторая Соросовская олимпиада школьников 1995-19996, МЦАМО, 1996
5. Глейзер Г. Д. Повышение эффективного обучения математике в школе – М.:Просвещение, 1989
6. Калмыкова З. И. Развитие продуктивного мышления
7. Кудрявцева, Кузнецов Областная олимпиада школьников по математике, Яр., 2002
8. Маркова А. К., Орлов А. Б. Формирование мотивации учения, М.: Просвещение, 1990
9. Немов Р. С. Психология – М.: Просвещение, 1990
10. Петраков И. С. Математические олимпиады школьников – М.: Просвещение, 1992
11. Познавательные процессы и способности в обучении – М.; Просвещение, 1990
12. Пойа Д. Как решать задачу: Пособие для учителей - М.,1961
13. Пойа Д. Математические и правдоподобные рассуждения – М., 1970
14. Сборник статей «Готовимся к олимпиаде по математике», ЯГПУ, 2000
15. Фридман Л. И., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи – М.: Просвещение, 1989
16. Штейнгауз Г. Сто задач – М.: Наука, 1982

Интернет-ресурсы:

http:/// www.problems.ru – сайт материалов Всероссийских олимпиад по математике и другим предметам.